

Gielisovy křivky a jejich vizualizace

Jan Bartošík

Bakalářská práce
2025



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

Fakulta aplikované informatiky

Ústav informatiky a umělé inteligence

Akademický rok: 2024/2025

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: Jan Bartošík
Osobní číslo: A21695
Studijní program: B0613A140020 Softwarové inženýrství
Forma studia: Kombinovaná
Téma práce: Gielisovy křivky a jejich vizualizace
Téma práce anglicky: Gielis Curves and their Visualization

Zásady pro vypracování

- Provedte literární rešerši a vypracujte úvodní text o Gielisových křivkách.
- Shrňte matematický základ teorie křivek.
- Na základě matematického modelu pojednejte o klasifikaci Gielisových křivek v závislosti na parametrech.
- Provedte návrh programu pro vizualizaci Gielisových křivek.
- Realizujte návrh a popište proces tvorby vizualizačního programu.
- Otestujte vyvinutý program standardními postupy.

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam doporučené literatury:

1. GIELIS, Johan. *The geometrical beauty of plants*. Dordrecht: Atlantis Press, 2017. ISBN 978-946-2391-512.
2. LINKEOVÁ, Ivana. *Základy počítačového modelování křivek a ploch*. Praha: České vysoké učení technické, 2008. ISBN 9788001040119.
3. BORY, Pavel. *C# bez předchozích znalostí*. Brno: Computer Press, 2016. ISBN 978-80-251-4686-6.
4. IAmTimCorey, 8.8.2022, *Intro to Windows Forms (WinForms) in .NET 6*, YouTube video. [11.11.2023]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=0zLZQesgV5o&ab_channel=IAmTimCorey.
5. Excellent programmer, 6.2.2022, *How to draw curve using C#*, YouTube video. [11.11.2023]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=LS9mu3xlvTE&ab_channel=Excellentprogrammer.
6. MATSUURA, Masaya. *Gielis' superformula and regular polygons*. J. Geom. 106, 383–403 (2015). <https://doi.org/10.1007/s00022-015-0269-z>.

Vedoucí bakalářské práce: **doc. Mgr. Zuzana Pátíková, Ph.D.**
Ústav matematiky

Datum zadání bakalářské práce: **27. října 2024**
Termín odevzdání bakalářské práce: **2. června 2025**



doc. Ing. Jiří Vojtěšek, Ph.D. v.r.
děkan

L.S.

prof. Mgr. Roman Jašek, Ph.D., DBA v.r.
ředitel ústavu

Ve Zlíně dne 17. listopadu 2024

PROHLÁŠENÍ AUTORA BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Beru na vědomí, že

- odevzdáním bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb., v platném znění bez ohledu na výsledek obhajoby;
- bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému a bude dostupná k nahlédnutí;
- jedno vyhotovení bakalářské práce v listinné podobě bude ponecháno Univerzitě Tomáše Bati ve Zlíně k uložení;
- na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- podle § 60 odst. 1 autorského zákona má Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- podle § 60 odst. 2 a 3 mohu užít své dílo – bakalářskou práci – nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen s předchozím písemným souhlasem Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše);
- pokud bylo k vypracování bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tj. k nekomerčnímu využití), nelze výsledky bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- pokud je výstupem bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá; neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji, že

- jsem na bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem řádně citoval; v případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor;
- odevzdaná verze bakalářské práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou obsahově totožné.

Ve Zlíně, dne

.....

podpis autora

ABSTRAKT

Tato bakalářská práce se zabývá matematickým popisem a vizualizací tvarů generovaných pomocí Gielisovy superformule. Teoretická část popisuje historický vývoj od Laméových křivek, přes jejich obecnější formu – superelipsy – až po univerzální rovnice Gielisovy superformule. Dále jsou popsány vlastnosti této rovnice, její parametry a rozšíření do trojrozměrného prostoru. Praktická část práce se zaměřuje na implementaci interaktivní aplikace v jazyce C# s využitím knihovny OpenTK, umožňující generování a transformaci 2D a 3D tvarů na základě zadaných parametrů. Aplikace rovněž podporuje export modelů a testování extrémních vstupních hodnot. Výsledkem práce je plně funkční nástroj vhodný pro vizualizaci organických struktur a studium matematických modelů přírodních tvarů.

Klíčová slova: superformule, Gielisova rovnice, vizualizace, parametrické křivky, OpenGL, C#

ABSTRACT

This bachelor's thesis deals with the mathematical description and visualization of shapes generated using the Gielis superformula. The theoretical part outlines the historical development from Lamé curves through their generalization—superellipses—to the universal formulation of the Gielis superformula. It explains the formula's properties, its parameters, and the extension to three-dimensional space. The practical part focuses on the implementation of an interactive application in C# using the OpenTK library. This application enables the generation and transformation of 2D and 3D shapes based on user-defined parameters and supports exporting models and testing extreme input values. The result is a fully functional tool suitable for visualizing organic structures and studying mathematical models of natural shapes.

Keywords: superformula, Gielis equation, visualization, parametric curves, OpenGL, C#

Děkuji paní doc. Mgr. Zuzaně Pátíkové, Ph.D. za odborné vedení mé bakalářské práce, cenné rady, podnětné připomínky a trpělivý přístup během celého procesu psaní. Její pomoc mi velmi usnadnila orientaci v tématu a přispěla k celkovému zlepšení kvality mé práce.

Rád bych rovněž vyjádřil vděčnost své rodině a blízkým za jejich trpělivost, motivaci a podporu, kterou mi poskytovali po celou dobu mého studia.

OBSAH

ÚVOD.....	11
I TEORETICKÁ ČÁST	12
1 MATEMATICKÝ ZÁKLAD POPISU KŘIVEK	13
1.1 KARTÉZSKÁ A POLÁRNÍ SOUSTAVA SOUŘADNIC	13
1.2 PŘEVODY MEZI SOUSTAVAMI	14
1.3 PARAMETRICKÉ VYJÁDŘENÍ KŘIVEK A PLOCH	14
1.4 ROVNICE KRUŽNICE A ELIPSY	15
2 LAMÉOVY KŘIVKY A SUPERELIPSY	17
2.1 HISTORIE LAMÉOVÝCH KŘIVEK.....	17
2.2 ROVNICE LAMÉOVÝCH KŘIVEK	17
2.3 VZTAH LAMÉOVÝCH KŘIVEK KE GIELISOVÝM KŘIVKÁM	18
3 GIELISOVA SUPERFORMULE.....	19
3.1 VZNIK GIELISOVY SUPERFORMULE	19
3.2 PARAMETRICKÝ ZÁPIS SUPERFORMULE	20
3.3 SYMETRIE A TVAROVÁ VARIABILITA	22
3.4 TYPOLOGIE TVARŮ GENEROVANÝCH SUPERFORMULÍ.....	23
3.5 GEOMETRICKÁ A NUMERICKÁ STABILITA VÝPOČTU	25
3.6 POROVNÁNÍ SE STANDARDNÍMI GEOMETRICKÝMI MODELY	26
4 GENERALIZACE A ROZŠÍŘENÍ SUPERFORMULE.....	27
4.1 ROZŠÍŘENÍ DO VYŠŠÍCH DIMENZÍ	27
4.2 MODIFIKACE A OBECNÉ FORMY SUPERFORMULE	29
5 APLIKACE GIELISOVÝCH KŘIVEK.....	30
5.1 BIOLOGIE	30
5.2 INŽENÝRSTVÍ.....	30
5.3 POČÍTAČOVÁ GRAFIKA A VIZUALIZACE	31
6 VIZUALIZACE A NUMERICKÁ ANALÝZA.....	33
6.1 PŘEVODY PRO VYKRESLOVÁNÍ.....	33
6.2 GENEROVÁNÍ KATALOGU TVARŮ	33
II PRAKTICKÁ ČÁST.....	34
7 VÝVOJ A IMPLEMENTACE APLIKACE PRO VIZUALIZACI GIELISOVÝCH KŘIVEK	35
7.1 ÚVOD	35
7.2 POUŽITÉ TECHNOLOGIE A PROSTŘEDÍ	35
8 ARCHITEKTURA APLIKACE.....	36

8.1	MODULÁRNÍ STRUKTURA	36
8.2	INICIALIZACE KOMPONENT	37
9	ALGORITMY VÝPOČTU BODŮ	38
9.1	VÝPOČET POLOMĚRU SUPERFORMULE	38
9.2	GENEROVÁNÍ BODŮ	39
10	VYKRESLOVÁNÍ BODŮ A MODELŮ	41
10.1	2D VYKRESLOVÁNÍ.....	41
10.2	3D VYKRESLOVÁNÍ.....	42
10.2.1	Model osvětlení Phong.....	43
11	UŽIVATELSKÉ ROZHRANÍ A FUNKCE.....	44
12	TESTOVÁNÍ.....	48
12.1	FUNKČNÍ TESTOVÁNÍ ZÁKLADNÍCH PARAMETRŮ	49
12.2	STRESS-TEST ROZLIŠENÍ	50
12.3	TEST KOMBINACÍ EXTRÉMNÍCH PARAMETRŮ	52
12.4	TEST OVLÁDÁNÍ A UŽIVATELSKÉHO ROZHRANÍ	54
13	SCÉNÁŘE POUŽITÍ A UKÁZKY	56
13.1	VIZUALIZACE PRAVIDELNÉ KVĚTINOVÉ KŘIVKY	56
13.2	VIZUALIZACE PRAVIDELNÉ HVĚZDICOVÉ KŘIVKY	57
13.3	VIZUALIZACE ČOČKOVITÉ KŘIVKY	57
	ZÁVĚR.....	58
	SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY	59
	SEZNAM OBRÁZKŮ	62
	SEZNAM TABULEK.....	63
	SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK	64
	SEZNAM PŘÍLOH.....	65

ÚVOD

Matematika hraje klíčovou roli v popisu reálného světa, od jednoduchých geometrických útvarů až po složité struktury, které se vyskytují v přírodě. Tradiční geometrické rovnice, jako jsou kružnice, elipsy či Laméovy křivky, byly po staletí základem analytického popisu tvarů. S rostoucí potřebou modelovat přirozené, organické a často asymetrické tvary vznikla potřeba rovnic, které by nabízely větší flexibilitu při zachování jednoduchého matematického zápisu. Právě v tomto kontextu se objevuje Gielisova superformule – zobecněná rovnice, která umožňuje generovat široké spektrum tvarů pomocí několika málo parametrů.

Tato bakalářská práce se věnuje nejen teoretickému popisu této rovnice a jejímu matematickému základu, ale také praktické implementaci aplikace, která umožňuje její vizualizaci. Superformule je výjimečná tím, že spojuje jednoduchost se schopností popsat komplexní a často i přírodní struktury, jako jsou květiny, listy, mušle nebo hvězdice. Práce se proto snaží ukázat, že mezi čistě matematickým zápisem a vizuálním zobrazením existuje přirozený most, který lze využít v různých oblastech – například v počítačové grafice, biologii nebo při návrhu algoritmicky generovaných objektů.

Cílem této práce je především přiblížit čtenáři princip Gielisovy superformule, její historické souvislosti a využití, a následně vytvořit a otestovat funkční programové řešení, které umožňuje její vizuální znázornění v 2D i 3D prostoru. Důraz je kladen na přehlednost, uživatelskou přívětivost a stabilitu aplikace. Výsledkem by měl být nejen funkční nástroj, ale i lepší porozumění možnostem, které Gielisova rovnice nabízí pro matematické i vizuální modelování světa kolem nás.

Prohlašuji, že odevzdaná verze bakalářské práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné. Prohlašuji, že při tvorbě této práce jsem použil nástroj generativního modelu AI ChatGPT, <https://chatgpt.com/> za účelem posloupnosti zpracovaného textu a tvorby základní struktury práce. Po použití tohoto nástroje jsem provedl kontrolu obsahu a přebírám za něj plnou zodpovědnost.

I TEORETICKÁ ČÁST

1 MATEMATICKÝ ZÁKLAD POPISU KŘIVEK

1.1 Kartézská a polární soustava souřadnic

Matematické objekty, jako jsou body, křivky a plochy, lze popisovat pomocí různých souřadných systémů. Nejčastěji se využívá kartézská soustava souřadnic, kde je poloha bodu určena dvojicí (x, y) v rovině nebo trojicí (x, y, z) v prostoru. Tento systém je velmi intuitivní a výhodný pro popis lineárních jevů, rovných úseků, ortogonálních os a jednoduchých algebraických vztahů.[3]

Vedle kartézské soustavy se v mnoha případech využívá polární soustava souřadnic, ve které je každý bod charakterizován svou vzdáleností r od počátku a úhlem φ vůči zvolené referenční ose, typicky ose x . Tento přístup je přirozený zejména při práci s kruhovými, spirálovitými a radiálně symetrickými strukturami, kde použití kartézských souřadnic vede k neefektivním nebo složitým rovnicím.[4]

Polární souřadnice hrají klíčovou roli v popisu funkcí definovaných úhlem – zejména v křivkách typu cykloid, Archimédova spirála nebo právě Gielisovy křivky, kde je tvar přímo vázán na změnu úhlu φ . Proto se tento systém široce používá nejen v teorii křivek, ale i v oblasti elektromagnetismu, hydrodynamiky, modelování biologických struktur a počítačové vizualizace.[10][12]

Základní vztahy mezi soustavami:

Z kartézských do polárních:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \quad (1)$$

Z polárních do kartézských:

$$x = r \cos(\varphi), \quad y = r \sin(\varphi). \quad (2)$$

Výše uvedené vztahy jsou základními nástroji při převodu rovnic mezi soustavami a při generování grafů a simulací. V implementaci Gielisovy superformule se počítá hodnota r pro každé φ , a výsledné souřadnice x a y se pak převádějí do 2D či 3D prostoru pro vizualizaci.[1]

1.2 Převody mezi soustavami

Převod mezi souřadnicovými systémy umožňuje jednodušší řešení určitých problémů, například výpočtu délek křivek, ploch nebo objemů rotací. Gielisova superformule sama o sobě je formulována v polárních souřadnicích, což umožňuje jednoduchý zápis komplexních tvarů s rotační symetrií.[3]

Při numerických simulacích je však často nutné převést polární zápis na kartézský pro vykreslování v grafických systémech. Například při vizualizaci Gielisovy křivky se hodnoty $r(\varphi)$ převádějí pomocí uvedených vztahů do souřadnic (x, y) a poté se vykreslují jako spojitá křivka.[2]

1.3 Parametrické vyjádření křivek a ploch

Parametrické vyjádření křivek spočívá v definici souřadnic bodů jako funkcí jedné proměnné, obvykle označované jako t (parametr času nebo polohy):

$$x = x(t), \quad y = y(t). \quad (3)$$

Pro plochy je parametrizace dvoupametrická:

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v). \quad (4)$$

Parametrizace umožňuje přímý popis tvarů bez nutnosti jejich explikace algebraickými rovnicemi. Navíc poskytuje pohodlný způsob, jak manipulovat s tvary například při deformacích, interpolacích nebo animacích.[3][12]

U Gielisovy superformule je parametr φ přímo parametrem křivky a umožňuje spojitý popis složitých křivek pomocí jednoduché funkce.[1]

1.4 Rovnice kružnice a elipsy

Základními stavebními bloky pro popis křivek v rovině jsou rovnice kružnice a elipsy. Tyto geometrické útvary tvoří výchozí základ pro složitější křivky, jako jsou Laméovy nebo Gielisovy křivky.[1][12]

Kružnice:

- Kartézská forma:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2, \quad (5)$$

kde (h, k) je souřadnice středu kružnice a r je její poloměr. Tato rovnice definuje všechny body, které mají konstantní vzdálenost r od daného středu.[3]

- Polární forma (střed v počátku):

$$r(\varphi) = R. \quad (6)$$

Tato rovnice říká, že pro libovolnou hodnotu úhlu φ je vzdálenost r od počátku konstantní a rovná se R . V tomto kontextu R označuje poloměr kružnice v polárním systému – tedy hodnotu, která zůstává neměnná bez ohledu na změnu úhlu. Jedná se o přímý analog poloměru r v kartézské rovnici. Kružnice je v polárním systému nejjednodušší možnou křivkou – právě její polární forma je základem pro rozšíření směrem ke komplexnějším tvarům prostřednictvím parametrických modifikací.[1][12]

- Parametrický zápis kružnice:

$$x(t) = h + r \cdot \cos(t), y(t) = k + r \cdot \sin(t), t \in [0, 2\pi] \quad (7)$$

Parametrická rovnice kružnice vyjadřuje její tvar pomocí úhlového parametru t , který odpovídá průběžnému záběru úhlu ve standardním směru proti směru hodinových ručiček. Parametrický přístup je velmi užitečný zejména při vykreslování a vizualizaci, protože umožňuje snadno generovat body na křivce bez nutnosti řešit kvadratické rovnice. Navíc tvoří základ pro zobecnění směrem ke složitějším tvarům jako jsou elipsy, superelipsy nebo „supershapes“ tvary.[2][3]

Elipsa:

- Kartézská forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1. \quad (8)$$

kde a a b jsou hlavní a vedlejší poloosy, přičemž $a > b$ definuje orientaci elipsy podél osy x . Hodnoty h a k určují souřadnice středu elipsy v kartézském souřadnicovém systému – tedy bod (h, k) . Tato rovnice popisuje množinu bodů, jejichž vzdálenosti od dvou pevných ohnisek mají konstantní součet.[3]

- Parametrická forma:

$$x(t) = h + a \cos(t), y(t) = k + b \sin(t). \quad (9)$$

Tato forma se běžně používá v počítačové grafice a vizualizaci – umožňuje totiž efektivně generovat body na elipse iterací parametru t (obvykle v rozsahu od 0 do 2π). Její výhodou je numerická jednoduchost při vykreslování pomocí diskretních kroků.[3]

Základ pro zobecnění

Rovnice kružnice a elipsy jsou klíčovým výchozím bodem pro další zobecnění – ať už směrem k superelipsám (Laméovy křivky), nebo až ke Gielisově superformuli. Gielisova superformule může generovat kružnici nebo elipsu jako speciální případy – stačí nastavit vhodně parametry m, n_1, n_2, n_3 a konstanty a, b . [1]

Například pro:

$$m = 4, n_1 = 2, n_2 = n_3 = 2, a = b = 1,$$

dostaneme zpět rovnici kružnice v polárních souřadnicích – což potvrzuje, že superformule opravdu sjednocuje základní geometrické tvary.[1]

2 LAMÉOVY KŘIVKY A SUPERELIPSY

2.1 Historie Laméových křivek

Historie popisu geometrických tvarů prostřednictvím obecnějších rovnic sahá do 19. století, kdy Gabriel Lamé definoval tzv. Laméovy křivky (též známé jako superelipsy). Lamé studoval křivky vzniklé jako řešení fyzikálních problémů, například v oblasti elasticity a elektřiny.[1] Jeho základní rovnice v kartézské soustavě má tvar:

$$\left|\frac{x}{a}\right|^n + \left|\frac{y}{b}\right|^n = 1. \quad (10)$$

kde a a b určují velikost hlavních os a n je exponent ovlivňující tvar křivky.[2]

Při $n = 2$ dostáváme klasickou elipsu, při jiných hodnotách vznikají tvary bližší čtvercům (pro $n > 2$) nebo zaoblenějším útvarům (pro $n < 2$).

2.2 Rovnice Laméových křivek

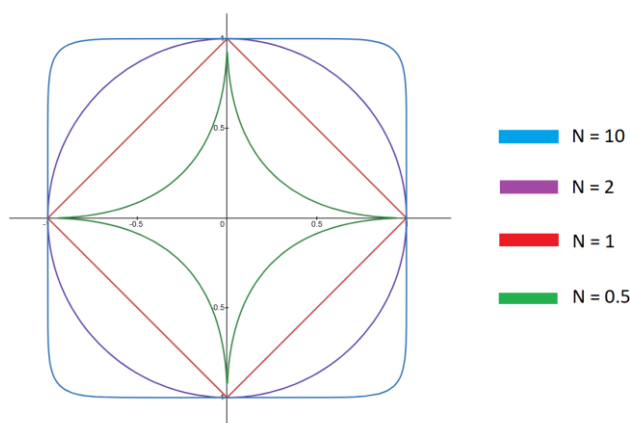
Laméovy křivky jsou schopné reprezentovat široké spektrum tvarů mezi kružnicí, elipsou a čtvercem pomocí jediného parametru n . Jejich klíčovou vlastností je zachování symetrie ve všech kvadrantech, což je dosaženo použitím absolutních hodnot v rovnici.[1]

Speciální případy:

$n = 2 \rightarrow$ elipsa (v případě $a = b$ kružnice),

$n < 2 \rightarrow$ zaoblené, hvězdicovité nebo „čtyřlaločné“ tvary,

$n > 2 \rightarrow$ ostřejší, k nekonečnu spíše čtverec.



Obrázek 1 Laméovy křivky vytvořeno v Desmos.com

2.3 Vztah Laméových křivek ke Gielisovým křivkám

Gielisova superformule je považována za přímé a silné zobecnění Laméovy rovnice, která popisuje tzv. superelipsy – tedy útvary, jež přecházejí mezi kružnicí, elipsou a čtvercem v závislosti na hodnotě exponentu.[4]

Na rozdíl od této jednoduché konfigurace nabízí Gielisova superformule zásadní rozšíření geometrických možností. Tato rovnice je definována v polárních souřadnicích a zavádí několik nových parametrů, které rozšiřují množinu generovaných tvarů:

- asymetrii (nezávislé řízení os pomocí n_2 a n_3),
- vícečetnou symetrii (pomocí parametru m),
- větší variabilitu tvarů.[1]

Zatímco Laméova rovnice pracuje výhradně se souměrností podél os x a y , Gielisova superformule umožňuje popsat i asymetrické a přirozenější struktury. Generované tvary mohou připomínat reálné biologické útvary, jako jsou květiny, mušle, listy, plody, krystalické struktury nebo i spirálovité elementy známé z mikrosvěta.[12]

Matematické rozšíření rovnice nevede pouze k estetickému efektu, ale má i praktický význam v oblasti modelování přírodních jevů, biologických růstových procesů a morfologie živých organismů. Tímto přechodem od Laméovy rovnice ke Gielisově superformuli byl učiněn zásadní krok směrem k vytvoření univerzálního geometrického jazyka, který je zároveň jednoduchý na zápis a výpočetně efektivní.[4][12]

Význam tohoto přechodu je patrný nejen v oblasti teoretické matematiky, ale také v počítačové grafice, biologickém modelování a dokonce i v architektuře a designu, kde lze pomocí této rovnice generovat esteticky přitažlivé a zároveň organicky působící struktury.[1]

3 GIELISOVA SUPERFORMULE

3.1 Vznik Gielisovy superformule

Na přelomu 20. a 21. století představil belgický fyzik, biolog a matematik Johan Gielis novou matematickou rovnicí, která se dnes označuje jako superformule. Tento nástroj představuje významné zobecnění tradičních rovnic pro popis přírodních tvarů a struktur a navazuje na koncepty jako jsou Laméovy křivky či superelipsy. Gielis se pokusil vytvořit obecnou formuli, která by sjednocovala různé typy geometrických útvarů pomocí několika ovladatelných parametrů.[1]

Jeho hlavní motivací byla snaha nalézt jednotný matematický jazyk pro přírodu, který by umožňoval generovat širokou škálu reálných i abstraktních tvarů – od kružnic, hvězdic a polygonů až po organické formy, jaké vidáme u listů, květů, plodů nebo krystalických struktur.[1][6]

První oficiální prezentace superformule proběhla v roce 2003 v článku A Generic Geometric Transformation that Unifies a Wide Range of Natural and Abstract Shapes, který byl publikován v prestižním časopise American Journal of Botany.[4] Gielis zde ukázal, že pomocí vhodné parametrizace v polárních souřadnicích lze popsat struktury, které byly dříve modelovány zcela odlišnými rovnicemi – například mořské hvězdice, květy, semena, skořápky, krystaly i spirály.[4]

Superformule tak umožňuje plynulé přechody mezi základními geometrickými tvary a komplexními organickými strukturami. Díky tomu našla využití nejen v oblasti morfologického modelování přírody, ale také v počítačové grafice, bioinformatice, architektuře, či algoritmickém designu.[1][2]

S postupujícím výzkumem byla Gielisova rovnice dále rozvíjena, zejména směrem k prostorovým strukturám a fraktálním tvarům. Dnes se stává univerzálním nástrojem pro popis forem napříč přírodními a technickými vědami, a její implementace je běžná v mnoha softwarových nástrojích pro vizualizaci, výuku i uměleckou tvorbu.[6][12]

3.2 Parametrický zápis superformule

Gielisova superformule je formulována v polárních souřadnicích a má následující podobu:

$$r(\varphi) = \left(\left| \frac{\cos\left(\frac{m\varphi}{4}\right)}{a} \right|^{n_2} + \left| \frac{\sin\left(\frac{m\varphi}{4}\right)}{b} \right|^{n_3} \right)^{-\frac{1}{n_1}}. \quad (11)$$

kde:

- φ je polární úhel (v radiánech),
- a, b jsou škálovací koeficienty (měřítko v osách x a y),
- m udává počet os symetrie,
- n_1, n_2, n_3 jsou parametry tvarové ostrosti.[4]

Díky své parametrické povaze umožňuje Gielisova rovnice plynulou transformaci mezi různými geometrickými tvary bez nutnosti přepisovat rovnici nebo měnit její strukturu. To z ní činí výjimečně univerzální nástroj, který dokáže přecházet od jednoduchých útvarů, jako je kružnice (při $n_1 = n_2 = n_3 = 2$), k pravidelným polygonům ($n_1 \rightarrow \infty$), až po květinové a hvězdicovité útvary. Výhodou je i schopnost vytvářet asymetrické tvary vhodné pro modelování biologických struktur – například při různém nastavení n_2 a n_3 lze vytvářet listy s nerovnoměrným zakřivením, čímž se simulují reálné přírodní tvary.[1][4]

Oproti klasickým geometrickým rovnicím, které jsou obvykle fixovány na konkrétní tvar (např. elipsa, parabola, hyperbola), nabízí Gielisova superformule kompaktní a zároveň extrémně flexibilní vyjádření celé třídy tvarů v rámci jediné rovnice. Její struktura je výhodná nejen pro matematickou analýzu, ale i pro počítačovou vizualizaci, protože umožňuje snadné řízení výstupu pomocí několika numerických posuvníků. Tato vlastnost je hojně využívána v interaktivních aplikacích, kde uživatel může intuitivně měnit tvar výstupu v reálném čase, což zvyšuje její atraktivitu pro výuku, výzkum i generativní design.[2][6]

Každý parametr hraje klíčovou roli v tom, jaký tvar bude výsledná křivka mít:

- m – počet opakování vzoru kolem středu (symetrie),
- a, b – deformace v jednotlivých směrech,
- n_1 – globální ostrost tvaru,
- n_2, n_3 – nezávislá ostrost v kosinové a sinusové složce.[1]

3.3 Symetrie a tvarová variabilita

Gielisova superformule poskytuje extrémní variabilitu generovaných tvarů.[1]

Symetrie:

Parametr m určuje, kolik os symetrie bude křivka mít. Například:

- $m = 5 \rightarrow$ pětilistý květ,
- $m = 3 \rightarrow$ trojlístek,
- $m = 12 \rightarrow$ dvanácticípá hvězda.[4]

U necelých hodnot vznikají spirálovité nebo asymetrické vzory.

Škálování:

Parametry a, b ovlivňují „roztážení“ křivky v osách x a y . Pokud $a \neq b$, výsledná křivka bude elipticky deformována. Při $a = b$ má křivka kruhový základ.[1]

Globální ostrost:

Parametr n_1 určuje celkový „přechod“ mezi jednotlivými částmi křivky. Při nízkých hodnotách (např. $n_1 = 1$) je tvar měkký a plynulý. S rostoucí hodnotou dochází ke zvýraznění hran a rohů.[1]

Nezávislá ostrost:

Parametry n_2 a n_3 mají obdobný účinek jako n_1 , avšak nezávisle ovlivňují tvar v jednotlivých směrech

– n_2 ovlivňuje „kosinovou“ komponentu, n_3 „sinusovou“.[1]

Umožňují asymetrické deformace, které jsou klíčové při modelování přírodních jevů, jež nejsou pravidelné.[1]

Při kombinaci všech těchto parametrů se ukazuje, jak neuvěřitelně flexibilní je Gielisova superformule. Umožňuje např. přechod z kruhu přes mnohoúhelník až ke hvězdovitému nebo „zvlněnému“ útvaru pouhou změnou několika hodnot.[1]

3.4 Typologie tvarů generovaných superformulí

Na základě rozsáhlé analýzy parametrických kombinací lze Gielisovy křivky systematicky roztrdit do několika základních typových kategorií.[1]

m	$n_1 = n_2 = n_3 = 1$	$n_1 = n_2 = n_3 = \frac{1}{2}$	$n_1 = n_2 = n_3 = \frac{3}{2}$	$n_1 = 5, n_2 = n_3 = 20$	$n_1 = 20, n_2 = n_3 = 5$	$n_1 \neq n_2 \neq n_3$	$n_i = 1, a = 2$
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							

Obrázek 2 Kategorie superformule. Copyright Kristof Lenjou

Pravidelné mnohoúhelníky

Pro vysoké hodnoty n_1 , např. $n_1 = n_2 = n_3 = 100$, a vhodné hodnoty m , vznikají křivky, které se blíží pravidelným mnohoúhelníkům. Takové tvary mají ostré hrany a rohy, podobně jako klasické geometrické útvary – trojúhelníky, čtverce, šestiúhelníky atd.[5]

Květinové tvary

Při použití nižších hodnot n_1 a hodnot m větších než 3 vznikají struktury připomínající květiny. Tyto křivky jsou zaoblené a mají měkké přechody.[4]

Typické parametry:

- $m = 5$,
- $n_1 = 2$,
- $n_2 = n_3 = 3$.

Hvězdicové útvary

Vznikají při kombinaci ostrých parametrů a lichých hodnot m . Výrazné špičky a střídání hrotů a prohlubní vytváří vzhled podobný hvězdám nebo výbuchům.[4]

Zvlněné a fraktálové křivky

Při zlomkových hodnotách parametrů dochází k vytváření velmi složitých útvarů, které mají fraktálové vlastnosti, případně spirálovité nebo asymetrické motivy.[6]

Asymetrické přírodní tvary

Pokud jsou parametry n_2 a n_3 nastaveny odlišně, vznikají asymetrické tvary vhodné pro modelování listů, mušlí, květů nebo bakteriálních kolonií. Toto asymetrické chování je často klíčem k modelování reálných přírodních struktur.[7]

3.5 Geometrická a numerická stabilita výpočtu

Při generování křivek pomocí Gielisovy superformule je důležité zohlednit numerickou stabilitu výpočtů. Rovnice obsahuje výrazy jako absolutní hodnota kosinu na n -tou mocninu, tedy:

$$\left| \frac{\cos\left(m \cdot \frac{\varphi}{4}\right)}{a} \right|^{n_2} + \left| \frac{\sin\left(m \cdot \frac{\varphi}{4}\right)}{b} \right|^{n_3}, \quad (12)$$

vše na $\left(-\frac{1}{n^1}\right)$.

Při extrémních hodnotách parametrů (např. vysoké nebo záporné exponenty n_2 a n_3) může dojít k numerickým nestabilitám – zejména v blízkosti hodnot, kde se jmenovatel rovnice blíží nule. Tyto situace je vhodné ošetřit například zavedením dolní meze ε (epsilon), nebo přepočtem v logaritmickém tvaru.[5]

V kontextu vizualizace hraje významnou roli také rozlišení vzorkování úhlové proměnné φ (phi). Při nízkém počtu vzorků dochází k deformaci křivek, zatímco při velmi vysokém počtu se zvyšuje výpočetní náročnost bez zásadního vizuálního přínosu. Optimální přístup spočívá v adaptivním vzorkování, případně v aplikaci technik pro vyhlazení křivky během renderování.[10]

Jak upozorňuje Gielis, generalita superformule musí být doplněna o numerickou opatrnost zejména při implementaci v trojrozměrných prostředích, kde dochází k řetězení výpočtů pro obě sféroidní proměnné.[1][11]

3.6 Porovnání se standardními geometrickými modely

Gielisova superformule představuje generalizaci mnoha běžných geometrických křivek. Její velkou výhodou je schopnost popsat různé tvary (od kružnic, elips, mnohoúhelníků až po hvězdice nebo organické útvary) pomocí jediné rovnice s několika parametry.[1]

Zatímco klasické křivky – jako například:

- kružnice: $x^2 + y^2 = r^2$, (13)

- elipsa: $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, (14)

- superelipsa (Laméova křivka): $\left|\frac{x}{a}\right|^n + \left|\frac{y}{b}\right|^n = 1$, (10)

– jsou specifické a rigidní, Gielisova rovnice má tvar:

$$r(\varphi) = \left(\left| \frac{\cos(\frac{m\varphi}{4})}{a} \right|^{n_2} + \left| \frac{\sin(\frac{m\varphi}{4})}{b} \right|^{n_3} \right)^{-\frac{1}{n_1}}. \quad (11)$$

Tento zápis v polárních souřadnicích umožňuje plynulý přechod mezi jednotlivými tvary jen změnou parametrů m, n_1, n_2, n_3, a, b . To představuje výhodu zejména v biologickém modelování, kde tvary objektů často leží mimo klasické geometrické definice.[4]

Na rozdíl od Bézierových nebo B-spline křivek, které používají sadu kontrolních bodů pro tvarování křivky, je Gielisova superformule plně analytická – což usnadňuje zpětné analytické vyhodnocení plochy, symetrie nebo zakřivení.[10]

Její univerzálnost však přináší i výzvy – zejména při implementaci ve vyšších dimenzích nebo při kombinaci s okrajovými podmínkami v numerických simulacích, kde je třeba použít doplňkové metody, např. konečné prvky.[12]

4 GENERALIZACE A ROZŠÍŘENÍ SUPERFORMULE

4.1 Rozšíření do vyšších dimenzí

Původní Gielisova superformule byla navržena jako dvourozměrná parametrická rovnice v polárních souřadnicích, s cílem popsat co nejširší množinu přirozeně se vyskytujících tvarů v rovině (2D). Tato rovnice umožňuje generování široké škály útvarů – od kruhů a polygonů až po asymetrické a fraktální křivky – pomocí několika málo parametrů. Brzy po publikaci tohoto konceptu však vznikla potřeba rozšířit tuto formuli do trojrozměrného prostoru, a tím rozšířit i oblast jejího praktického využití.[1][4]

Trojrozměrná verze Gielisovy superformule je navržena analogicky k 2D variantě, ale s využitím sférických souřadnic, které jsou pro prostorové modelování přirozenější.[1] Ve 3D prostoru je poloha bodu určena dvěma úhly – azimutálním úhlem θ a zenitovým úhlem φ – a výsledná poloha v kartézských souřadnicích se zapisuje následovně:

$$\begin{aligned}x &= r(\theta, \varphi) * \cos(\theta) * \sin(\varphi) , \\y &= r(\theta, \varphi) * \sin(\theta) * \sin(\varphi) , \\z &= r(\theta, \varphi) * \cos(\varphi) ,\end{aligned}\tag{15}$$

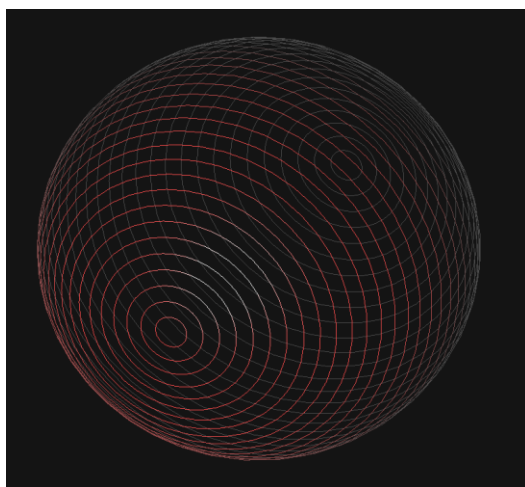
kde funkce $r(\theta, \varphi)$ představuje rozšířenou superformuli, která je závislá na dvou úhlových proměnných a obsahuje sadu parametrů definujících tvar stejně jako v rovině. Tato varianta umožňuje vytvářet tělesa, jejichž struktura je kontinuálně symetrická kolem osy nebo roviny – typicky se jedná o tělesa připomínající plody, mušle, spirály, hvězdice, toroidy nebo biologické buňky.[1][12]

Jedním z významných přínosů 3D rozšíření je možnost vytvářet uzavřené objemy s hladkým a plynulým povrchem bez nutnosti použití polygonálních sítí. To zajišťuje nejen vysokou geometrickou přesnost, ale také optimalizaci výpočetního výkonu při vizualizaci, protože výpočet je čistě parametrický a nepotřebuje složitou topologii.[5] Využití nachází zejména ve vědních oblastech, které vyžadují organickou geometrii – biologie, biomatematika a výpočetní design.[5]

V oblasti biologického modelování se trojrozměrná superformule používá např. při simulaci tvarů semen, buněčných membrán, virových obalů nebo rostlinných plodů. Díky možnosti nezávisle řídit jednotlivé části symetrie je možné věrně napodobit morfologické asymetrie, které jsou běžné v přírodních strukturách.[1][11][12]

Z hlediska digitální vizualizace a grafiky je rozšířená superformule mimořádně atraktivní, neboť poskytuje flexibilní způsob generování 3D modelů s vysokým estetickým a strukturálním obsahem při zachování nízké paměťové a výpočetní náročnosti. Byla proto implementována i do prostředí jako Blender, Unity či WebGL a našla uplatnění ve vizuálním umění, generativním designu a herním průmyslu.[6][16]

Další vývoj vedl ke konstrukci tzv. variabilních superformulí, které umožňují nejen pevné definování tvaru, ale také jeho plynulou změnu v čase. Díky tomu je možné modelovat dynamické objekty – například proces růstu, transformace buněk, nebo vizualizaci deformačních jevů v materiálovém inženýrství.[12] Gielisova superformule s parametry pro azimutální i zenitový úhel $m = n_1 = n_2 = n_3 = 2$, $a = b = 1$.(3) Tyto parametry vlastně dávají nejjednodušší tvar – sféru (kouli).



Obrázek 3 Gielisova superformule ve 3D

4.2 Modifikace a obecné formy superformule

Vedle rozšíření do trojrozměrného prostoru byla superformule rovněž upravována a zobecňována tak, aby vyhovovala různým specializovaným požadavkům. Například bylo zavedeno vektorové řízení parametrů, dynamická proměnlivost nebo nestacionární chování, které umožňuje generovat časově závislé nebo adaptivní tvary.[1]

Některé z těchto modifikací zahrnují:

- Dynamické parametry. Hodnoty m , n_1 , n_2 , n_3 , jsou funkcemi času nebo jiné veličiny.
- Přidání harmonických členů do trigonometrických funkcí.

Tato rozšíření posouvají superformuli mimo rámec klasické geometrie a umožňují její využití i ve fyzikálních simulacích, biologickém růstu nebo evolučních algoritmech.[1]

Například Gielis a spoluautoři prezentovali použití rozšířené superformule pro návrh tvarů vertikálních větrných turbín, kde tvary optimalizované pomocí evolučních algoritmů vykazovaly vysokou účinnost a konstrukční jednoduchost.[8]

Z obecného hlediska lze říci, že superformule funguje jako rámec, který lze dále parametrizovat a rozšiřovat podle potřeb konkrétní aplikace. Díky své matematické otevřenosti je vhodná jak pro přesné analytické modelování, tak pro uměleckou tvorbu.[1]

Příklady dynamických rozšíření:

- $m(t) = m_0 + \sin(\omega t)$ - počet os symetrie se v čase mění,
- $n_1(t), n_2(t), n_3(t)$ - změny ostroty a zaoblení v čase.

Takto dynamizovaná superformule je vhodná například pro:

- simulace biologického růstu (např. vývoj květin),
- animace v počítačové grafice,
- interaktivní vizualizace reagující na vstupní data.[1][12]

5 APLIKACE GIELISOVÝCH KŘIVEK

5.1 Biologie

Jednou z nejvýznamnějších oblastí aplikace Gielisovy superformule je biologie, kde slouží jako nástroj pro matematické modelování přírodních forem.[4] Superformule umožňuje přesně modelovat tvary, které se běžně vyskytují v přírodě, například:

- květy (růže, lilie, slunečnice),
- listy rostlin,
- mušle a spirálovité schránky mořských živočichů,
- plody (např. dýně nebo exotické ovoce).

Použitím vhodných parametrů lze simulovat různé morfologické vlastnosti, například symetrii květů, asymetrii listů nebo spirální růst mušlí.[1] Matematický popis těchto tvarů má důležité využití v botanice a ekologickém modelování, kde pomáhá například v simulaci evoluční adaptace tvarů.[6]

5.2 Inženýrství

V technických oborech byla Gielisova superformule využita například při optimalizaci konstrukcí:

- **Větrné turbíny:** Pomocí evolučních algoritmů a superformule byly navrženy optimalizované profily vertikálních větrných turbín, které vykazují vyšší účinnost než klasické turbíny.[8]
- **Design architektonických prvků:** Superformule je používána při návrhu organicky tvarovaných budov, mostů a konstrukcí, kde je požadována kombinace estetiky a funkčnosti.[1]
- **Výroba a 3D tisk:** Využití parametrického modelování umožňuje generovat tvary vhodné pro aditivní výrobu (např. strukturální díly inspirované přírodními formami).

Předností je možnost generovat komplexní tvary s jednoduchou kontrolou pomocí několika parametrů, což usnadňuje výpočty i výrobu.

5.3 Počítačová grafika a vizualizace

Gielisova superformule se stala důležitým nástrojem v oblasti počítačové grafiky, kde je ceněna pro svou schopnost generovat rozsáhlou škálu tvarů pomocí jediného vztahového formátu[1]. Mezi hlavní oblasti jejího využití patří:

- procedurální modelování vegetace a biologických struktur,[17]
- vizualizace organických tvarů v reálném čase,[17]
- animace přechodů mezi různými tvary (tzv. morphing).[17][18]

Procedurální generace a modelování:

Procedurální generování je přístup, který využívá matematické rovnice a algoritmy k automatické tvorbě grafických objektů.[14] Superformule zde nabízí výhodu v tom, že pomocí několika parametrů (m, n_1, n_2, n_3, a, b) lze vytvořit široké spektrum tvarů – od pravidelných polygonů po složité přírodní útvary jako jsou listy, mušle či hvězdice.[6][1]

Tato metoda byla prakticky využita např. ve hrách typu No Man's Sky, kde je generace planetární flóry založena na podobném principu (i když nikoliv přímo na superformuli). Gielisova rovnice by zde poskytla dokonce větší flexibilitu a kontrolu nad tvary, což ukazuje její potenciál v herním průmyslu.[9]

Výkonnost a výhody:

Jedním z hlavních přínosů superformule v grafice je nízká výpočetní náročnost. Díky parametrickému vyjádření je možné jednotlivé body křivky (nebo povrchu) spočítat přímo bez nutnosti komplikované topologické struktury nebo polygonální aproximace.[15] To umožňuje:

- efektivní vykreslování v reálném čase (např. WebGL, OpenGL),
- použití i na mobilních nebo vestavěných zařízeních,
- tvorbu interaktivních grafických nástrojů pro výuku i uměleckou tvorbu.[15][17]

Vizualizace a animace:

Gielisova superformule je také ideálním prostředkem pro plynulou transformaci tvarů v animacích – změnou jednoho či více parametrů lze přirozeně přecházet mezi různými strukturami. Například animace „rozvíjejícího se květu“ lze vytvořit tím, že parametr m roste z 3 na 6, zatímco expozice n_1 se zvyšuje, čímž se mění ostrost okvětních lístků [18].

Tento princip lze využít i pro vizualizaci dat (tzv. shape-based visualization), kde hodnoty z datasetu řídí deformaci tvaru – např. v biologii, kdy růstové fáze orgánů jsou vizualizovány pomocí plynulého morfování křivek.[18]

Užití v digitálním umění a generativním designu:

V oblasti umění a designu je superformule nástrojem pro tzv. generativní estetiku. Umělci jako P. Goodfellow nebo kolektivní projekty jako Superformula Visuals využívají její parametry k tvorbě živých vizualizací a interaktivních instalací. Její schopnost kombinovat pravidelnost s nepravidelností je obzvláště zajímavá v oblasti algoritmické estetiky.[13]

Softwarové využití:

Superformule byla integrována do celé řady výpočetních nástrojů a jazyků:

- pluginy pro Blender,
- moduly pro Processing,
- implementace v Unity,
- webové verze v JavaScript/WebGL.

Pro grafiky a vývojáře to znamená, že ji lze snadno využít k tvorbě 3D modelů, animací, shaderů i efektů, bez nutnosti ručního modelování.[16]

6 VIZUALIZACE A NUMERICKÁ ANALÝZA

6.1 Převody pro vykreslování

Při vizualizaci Gielisových křivek je nezbytné převést jejich polární zápis na kartézský souřadnicový systém.

Tento proces využívá základní vztahy:

$$x = r(\varphi)\cos(\varphi), y = r(\varphi)\sin(\varphi). \quad (16)$$

kde $r(\varphi)$ je hodnota získaná ze superformule.[4]

Pro správné vykreslení tvaru je klíčové:

- použít jemné rozdělení úhlového parametru φ na malé kroky,
- udržet přesnost výpočtů, zejména při velmi ostrých nebo fraktálových strukturách.[1]

V praktických implementacích (např. v Pythonu nebo MATLABu) se typicky používá

$N = 1000 - 5000$ bodů na celý rozsah $\varphi \in [0, 2\pi]$ pro dostatečnou hladkost výsledné křivky.

6.2 Generování katalogu tvarů

Pro praktické využití superformule je vhodné vytvořit tzv. katalog tvarů. Jedná se o systematické seskupení vizualizací tvarů generovaných různými kombinacemi parametrů.[6] Existuje interaktivní katalog v podobě softwaru od Paula Bourkeho a jeho galerie na webové stránce.[24]

Katalog může být:

- statický (např. jako PDF nebo obrázková galerie),
- interaktivní (např. jako webová aplikace s možností změny parametrů v reálném čase).

Kromě samotného tvaru katalog obsahuje:

- hodnoty všech šesti hlavních parametrů (a, b, m, n_1, n_2, n_3) ,
- popis symetrie a význačných rysů,
- náhled na využití (např. „vhodné pro modelování květinových struktur“).

Takový katalog je užitečný pro návrháře, učitele i výzkumníky, kteří chtějí rychle najít inspiraci nebo přesný tvar pro svou aplikaci.[6]

II PRAKTICKÁ ČÁST

7 VÝVOJ A IMPLEMENTACE APLIKACE PRO VIZUALIZACI GIELISOVÝCH KŘIVEK

7.1 Úvod

Matematické modelování přírodních tvarů, jakými jsou květy, mušle či listy, vyžaduje flexibilní a přesný nástroj pro vizualizaci. Proto vznikla desktopová aplikace, která umožňuje interaktivní tvorbu Gielisových křivek v 2D a 3D prostoru.

Cílem bylo:

- umožnit okamžitou vizuální odezvu na změnu parametrů superformule,
- nabídnout plnou kontrolu nad hlavními parametry m, n_1, n_2, n_3, a, b ,
- zajistit stabilitu výpočtů i při extrémních hodnotách,
- nabídnout intuitivní uživatelské rozhraní,
- podporovat 3D manipulaci s objektem (přiblížení, rotaci),
- vytvoření interaktivního katalogu pro vizualizaci.

7.2 Použité technologie a prostředí

Vývoj probíhal v prostředí Visual Studio 2022 s využitím:

- .NET 6.0 – moderní a výkonný framework pro desktopové aplikace,
- C# – objektově orientovaný jazyk pro hlavní logiku programu,
- OpenTK – OpenGL wrapper pro renderování,
- WinForms – jednoduchý systém pro tvorbu GUI.

Výhodou zvoleného stacku je:

- možnost hardwarové akcelerace přes OpenGL,
- jednoduchá správa událostí,
- kompatibilita na většině Windows systémů.

8 ARCHITEKTURA APLIKACE

8.1 Modulární struktura

Program je rozdělen do několika funkčních celků:

Tabulka 1 Struktura programu

Modul	Funkce
Form1	Hlavní ovladač aplikace
GLControl1 (3D)	Renderer trojrozměrných tvarů
GLControl2 (2D)	Renderer rovinných křivek
Parameter Handlers	Ovládání parametrů Gielisovy superformule
Render Engine	Výpočet bodů, kreslení objektů
Camera Controller	Správa zoomu a rotace pomocí myši

(zdroj: vlastní)

Form1 je třída, která dědí od `System.Windows.Forms.Form`. To znamená, že slouží jako hlavní uživatelské rozhraní aplikace. V typických aplikacích Windows Forms má každé okno svou třídu a `Form1` je výchozí formulář, který Visual Studio automaticky vytvoří při založení projektu typu Windows Forms App (.NET).[19][20]

GLControl představuje specializovanou komponentu poskytovanou knihovnou OpenTK (Open Toolkit Library), která umožňuje implementovat vykreslování pomocí OpenGL v rámci prostředí Windows Forms. Tato komponenta funguje jako kontejner pro OpenGL kontext a poskytuje plnou podporu pro interaktivní grafiku v reálném čase. Díky podpoře tzv. double-bufferingu zajišťuje plynulé překreslování bez vizuálního rušení (např. blikání obrazu), což je zásadní pro aplikace vizualizující dynamická data nebo 3D modely.[23]

8.2 Inicializace komponent

V metodě InitializeGLControl() je připraven OpenGL kontext pro oba rendery:

```
private void InitializeGLControl()
{
    this.glControl1 = new OpenTK.GLControl();
    this.glControl2 = new OpenTK.GLControl();

    this.glControl1.Load += new
System.EventHandler(this.GlControl1_Load);
    this.glControl1.Paint += new
System.Windows.Forms.PaintEventHandler(this.GlControl1_Paint);

    this.glControl2.Load += new
System.EventHandler(this.GlControl2_Load);
    this.glControl2.Paint += new
System.Windows.Forms.PaintEventHandler(this.GlControl2_Paint);

    this.glControl1.MouseDown += GlControl1_MouseDown;
    this.glControl1.MouseMove += GlControl1_MouseMove;
    this.glControl1.MouseUp += GlControl1_MouseUp;
    this.glControl1.MouseWheel += GlControl1_MouseWheel;
    this.glControl2.MouseWheel += GlControl1_MouseWheel;
}
```

Oddělené eventy pro 2D a 3D části umožňují snadné přepínání mezi režimy.

9 ALGORITMY VÝPOČTU BODŮ

Jádro aplikace tvoří přesný výpočet pozic bodů na základě Gielisovy superformule.

9.1 Výpočet poloměru superformule

Hodnota r pro daný úhel θ je vypočítána funkcí:

```
static double SuperShapeR(double m, double n1, double n2, double n3,
    double a, double b, double[] angle, int i)
{
    double rAngle = Math.Pow(Math.Abs(1 / a * Math.Abs(Math.Cos(m *
    angle[i] / 4.0))), n2) +
        Math.Pow(Math.Abs(1 / b * Math.Abs(Math.Sin(m *
    angle[i] / 4.0))), n3);
    double r = Math.Pow(rAngle, (-1.0 / n1));
    return r;
}
```

Výpočet hodnoty r (poloměr) je zásadní součástí Gielisovy superformule, neboť právě tato hodnota určuje vzdálenost konkrétního bodu na křivce od středu souřadného systému pro daný úhel. Funkce „SuperShapeR“ přijímá jako vstupní parametry hodnoty specifické pro tvar – tedy m, n_1, n_2, n_3, a, b – a pole úhlů, ve kterém je vybrán konkrétní úhel (označovaný jako θ) pro výpočet.

Samotný výpočet r je rozdělen do dvou částí: nejprve se spočítá tzv. „rAngle“, což je suma dvou členů – jeden založený na kosinu a druhý na sinu. Každý z těchto členů je upraven koeficienty a a b , které řídí měřítko v osách x a y . Tyto členy jsou následně absolutně hodnotově ošetřeny, aby nedocházelo k záporným hodnotám při mocnění. Výsledky jsou umocněny na exponenty n_2 a n_3 , které ovlivňují ostrost dané části křivky (kosinové a sinusové složky).

9.2 Generování bodů

Pro 2D model výpočet bodů:

```
private void CalculateGielis2D(int resolution, double p)
{
    double[] u = GenerateArray(0, p * Math.PI, resolution);

    for (int i = 0; i <= percent; i++)
    {
        double r = SuperShapeR(p1[0], p1[1], p1[2], p1[3], ab1[0],
ab1[1], u, i);
        double x = r * Math.Cos(u[i]);
        double y = r * Math.Sin(u[i]);
        circle[i] = new Vector2((float)x, (float)y);
    }
}
```

Tato funkce slouží k výpočtu bodů pro 2D vizualizaci Gielisovy křivky. Její hlavní úlohou je vytvořit souřadnice bodů, které tvoří obrys tvaru generovaného pomocí Gielisovy superformule ve dvourozměrném prostoru.

Funkce pracuje tak, že nejprve vytvoří pole úhlů, rozložené rovnoměrně mezi 0 a určitou násobnou hodnotu π (danou parametrem p). Toto pole reprezentuje jednotlivé směry, ve kterých se budou vypočítávat body na křivce.

Pro každý úhel se pomocí Gielisovy rovnice vypočítá vzdálenost (poloměr) od středu souřadného systému. Tato vzdálenost se přepočítá na kartézské souřadnice (x, y) pomocí goniometrických funkcí. Výsledné body tvoří uzavřenou křivku, která může mít rozličné tvary – od kruhů přes květinové vzory až po hvězdicové útvary – v závislosti na zvolených parametrech superformule.

Spojením těchto bodů vzniká výsledná křivka, která je následně použita k vykreslení ve 2D režimu. Výsledné body jsou ukládány do pole “**circle**“, které slouží jako datová struktura pro uchování tvaru. Díky tomu lze s křivkou dále pracovat – například ji vykreslovat, transformovat nebo analyzovat. Tento přístup umožňuje efektivní generování složitých tvarů s minimálním výpočetním zatížením.

Pro 3D model výpočet bodů:

```
private void CalculateGielis3D(int resolution, double p)
{
    double[] u = GenerateArray(0, p * Math.PI, resolution);
    double[] v = GenerateArray(-Math.PI / 2.0, Math.PI / 2.0,
        resolution);
    for (int i = 0; i <= resolution; i++)
    {
        for (int j = 0; j <= resolution; j++)
        {
            double r1 = SuperShapeR(p1[0], p1[1], p1[2], p1[3], ab1[0],
ab1[1], u, i);
            double r2 = SuperShapeR(p2[0], p2[1], p2[2], p2[3], ab2[0],
ab2[1], v, j);
            double x = r1 * Math.Cos(u[i]) * r2 * Math.Cos(v[j]);
            double y = r1 * Math.Sin(u[i]) * r2 * Math.Cos(v[j]);
            double z = r2 * Math.Sin(v[j]);
            globe[i, j] = new Vector3((float)x, (float)y, (float)z);
        }
    }
}
```

Funkce “CalculateGielis3D“ slouží k výpočtu trojrozměrného modelu na základě Gielisovy superformule. Jejím cílem je vytvořit matici bodů ve 3D prostoru, které definují tvar na základě parametrizované rovnice v sférických souřadnicích. Proces začíná vytvořením dvou úhlových polí – jedno pro horizontální úhel a druhé pro vertikální úhel. Tato pole pokrývají celý rozsah úhlů nezbytný pro modelování sféricky symetrického tvaru, tedy plný kruh a polokouli.

Následně se pomocí dvou vnořených smyček vypočítává hodnota superformule pro každý bod v úhlové mřížce. Superformule je zde použita ve dvou sadách parametrů – jedna řídí horizontální profil a druhá vertikální profil tvaru.

Každý výpočet generuje dva poloměry, které se následně použijí k výpočtu prostorových souřadnic (x, y, z) . Tyto souřadnice odpovídají bodům na povrchu tělesa, které je možné následně vizuálně zobrazit pomocí OpenGL. Výsledné souřadnice jsou ukládány do pole „globe“, které slouží jako datová struktura uchovávající veškeré výpočty pro následné vykreslení tvaru ve 3D prostoru.

10 VYKRESLOVÁNÍ BODŮ A MODELŮ

10.1 2D vykreslování

Křivka je vykreslována jako souvislá posloupnost úseček (`GL.Begin(PrimitiveType.Lines)`), kde každý segment spojuje dva sousední body. Vytváří se spojité úsečky mezi sousedními body.

Použitá technika:

- ortografická projekce (2D pohled),
- nastavitelné rozlišení (percent).

Metoda `DrawGielis2D()`:

```
private void DrawGielis2D(double rt, PaintEventArgs e)
{
    GL.LineWidth(2.5f);
    GL.Begin(PrimitiveType.Lines);

    for (int i = 0; i < percent; i++)
    {
        Vector2 v1 = circle[i];
        Vector2 v2 = circle[i + 1];

        GL.Vertex2(v1.X * rt, v1.Y * rt);
        GL.Vertex2(v2.X * rt, v2.Y * rt);
    }
    GL.End(); }
```

Pro 2D vykreslování bylo originálně v plánu použít vykreslovací metodu zabudovanou ve Windows Forms, která se nazývá `Drawing`. Pomocí této metody by se z bodů vykreslila křivka.[21] Od této metody jsem odstoupil, protože některé hodnoty při výpočtu křivky dosahovaly k nekonečným hodnotám a metoda nedokázala tyto veliká čísla zpracovat. To následně vyústilo k přetečení a následnému selhání aplikace.

10.2 3D vykreslování

Objekt je v prostoru vykreslován pomocí tzv. Triangle Stripů

(GL.Begin(PrimitiveType.TriangleStrip)), čímž vznikají souvislé plošky (mesh).

Použité techniky:

- perspektivní projekce,
- orbitální kamera řízená myší (rotationX, rotationY),
- ambientní, difúzní a spekulární světlo (nastaveno v `GlControl1_Load()`),
- automatický výpočet normál (`CalculateNormal()`).

Metoda `DrawGielis3D()` využívá trojúhelníkové pruhy:

```
private void DrawGielis3D(double rt, PaintEventArgs e)
{
    for (int i = 0; i <= total - 1; i++)
    {
        GL.Begin(PrimitiveType.TriangleStrip);
        for (int j = 0; j <= total; j++)
        {
            Vector3 v1 = globe[i, j];
            Vector3 v2 = globe[i + 1, j];

            Vector3 normal = CalculateNormal(globe[i, j], globe[i, j + 1], globe[i + 1, j]);
            GL.Normal3(normal);

            GL.Vertex3(v1.X * rt, v1.Y * rt, v1.Z * rt);
            GL.Vertex3(v2.X * rt, v2.Y * rt, v2.Z * rt);
        }
        GL.End();
    }
}
```

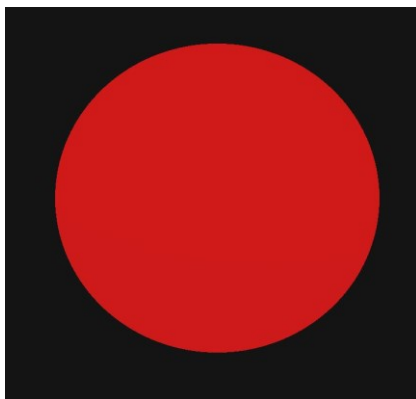
Vypočítané normály zajišťují správné osvětlení objektu.

10.2.1 Model osvětlení Phong

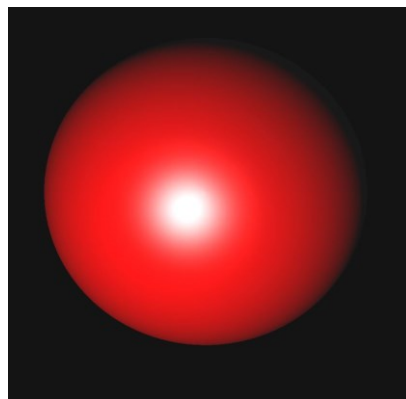
Phongův osvětlovací model (Phong lighting model) je jeden z nejběžnějších způsobů, jak realisticky simulovat osvětlení v počítačové grafice. Funguje na základě tří hlavních složek:

1. Ambientní složka – představuje všudypřítomné světlo v prostředí, které osvětluje objekt rovnoměrně ze všech stran. Dodává základní jas i těm částem objektu, které nejsou přímo osvětleny.[22]
2. Difúzní složka – simuluje světlo dopadající přímo na povrch. Záleží na úhlu dopadu mezi světelným paprskem a normálou povrchu – čím více světlo dopadá kolmo, tím je osvit intenzivnější. Tato složka dodává tvarům hloubku.[22]
3. Zrcadlová (spekulární) složka – zajišťuje lesk a odlesky na povrchu, které závisí na pozici pozorovatele. Čím blíže je odraz světla k pohledu kamery, tím výraznější je odlesk.[22]

Výsledné osvětlení v modelu je dáno součtem těchto tří složek. Phongův model tak vytváří iluzivní dojem trojrozměrného nasvícení, a to bez nutnosti použití komplikované fyzikální simulace. Používá se často při vykreslování 3D scén ve hrách nebo vizualizacích.[22]



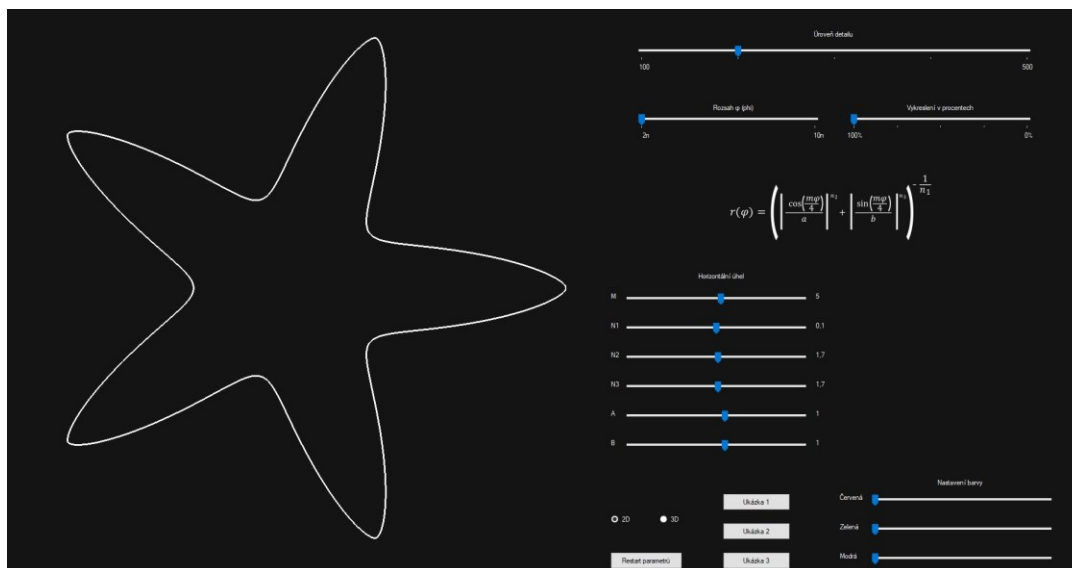
Obrázek 5 Bez Phong modelu



Obrázek 4 S využitím Phong modelu

11 UŽIVATELSKÉ ROZHRAŇÍ A FUNKCE

Uživatelské rozhraní vytvořené aplikace pro vizualizaci Gielisových křivek bylo navrženo tak, aby bylo přehledné, intuitivní a zároveň dostatečně výkonné pro práci s pokročilými geometrickými parametry.

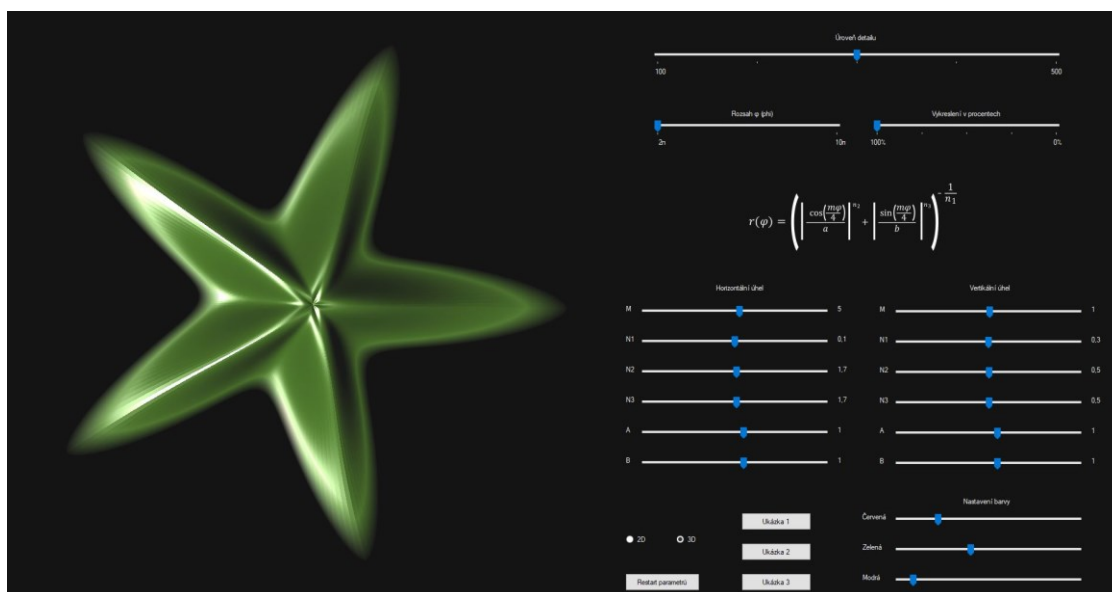


Obrázek 6 Uživatelské rozhraní pro 2D

Celý formulář je rozdělen do dvou hlavních částí. Levá strana slouží k vizualizaci samotné křivky – ať už ve dvourozměrném, nebo trojrozměrném prostoru – zatímco pravá část představuje interaktivní ovládací panel. Vizuální stránka je laděna do tmavého režimu, což zajišťuje pohodlnou práci i při delším používání, a zároveň vytváří příjemný kontrast pro všechny grafické prvky.

V horní části panelu se nachází ovládací prvky pro nastavení úrovně detailu, rozsahu úhlu φ (phi) a procenta vykreslené části křivky. Tyto parametry umožňují uživateli ovlivnit přesnost, rozsah a rozsáhlost generovaného objektu. Pod nimi je umístěn grafický zápis rovnice Gielisovy superformule, který přispívá k lepšímu porozumění vztahům mezi jednotlivými parametry a výsledným tvarem.

Hlavní část ovládacího panelu tvoří dvě skupiny posuvníků – jedna pro horizontální a druhá pro vertikální složku křivky. Každá skupina obsahuje šest základních parametrů superformule: m, n_1, n_2, n_3, a a b . Uživatel může jejich hodnoty upravovat nezávisle, což umožňuje vytvářet jak symetrické, tak asymetrické tvary, a to s vysokou mírou variability. Díky těmto posuvníkům lze snadno měnit ostrost tvaru, počet ramen či deformaci ve směru os.



Obrázek 7 Uživatelské rozhraní pro 3D

Součástí rozhraní je také možnost přepínání mezi dvourozměrným a trojrozměrným režimem vykreslení. Kromě toho jsou k dispozici tři tlačítka pro rychlé načtení přednastavených ukázkových tvarů a jedno tlačítko pro návrat všech parametrů do výchozího stavu. V dolní části se nachází RGB barevné ovládání, které uživateli umožňuje upravit vzhled vizualizovaného objektu pomocí posuvníků pro červenou, zelenou a modrou složku barvy.

Příklad reakce na změnu parametru *m*:

```
private void trackBar2_ValueChanged(object sender, EventArgs e)
{
    p1[0] = (float)(trackBar2.Value / 10.0);
    Recalculate();
}
```

Recalculate() přepočítá všechny body a obnoví scénu.

Funkce pro přiblížení kolečkem myši:

```
private void GlControl1_MouseWheel(object sender, MouseEventArgs e)
{
    // Získání informací o posunutí kolečkem myši
    int delta = e.Delta;

    // Přenastavení hodnoty rozsahu rotace podle směru pohybu kolečka
    myši

    if (delta > 0 && zoom < 1.0f) // Kolečko nahoru
    {
        zoom += 0.1f;
    }
    else if (delta < 0 && zoom > 0.1f) // Kolečko dolů
    {
        zoom -= 0.1f;
    }
}
```

Funkce umožňuje přiblížení a oddálení 2D/3D objektu pomocí kolečka myši. Při otočení kolečka (MouseWheel) se zjistí směr a intenzita pohybu (delta). Pokud uživatel otáčí kolečkem myši nahoru a současné přiblížení (zoom) je menší než maximální hodnota (1.0), scéna se přiblíží – hodnota zoom se zvýší o 0.1. Naopak při otáčení dolů se hodnota sníží (do minima 0.1), čímž se scéna oddálí. Funkce tak zajišťuje plynulé ovládání přiblížení modelu pomocí myši.

Funkce pro otáčení pomocí myši:

```
private void GlControll1_MouseDown(object sender, MouseEventArgs e)
{
    if (e.Button == MouseButton.Right)
    {
        lastMousePos = new Vector2(e.X, e.Y);
        mousePressed = true;
    }
}

private void GlControll1_MouseMove(object sender, MouseEventArgs e)
{
    if (mousePressed)
    {
        var mousePos = new Vector2(e.X, e.Y);
        var delta = mousePos - lastMousePos;
        rotationX += delta.Y * 0.01f;
        rotationY += delta.X * 0.01f;
        lastMousePos = mousePos;
    }
}

private void GlControll1_MouseUp(object sender, MouseEventArgs e)
{
    if (e.Button == MouseButton.Right)
    {
        lastMousePos = Vector2.Zero;
        mousePressed = false;
    }
}
```

Tato funkce zajišťuje otáčení 3D objektu pomocí pravého tlačítka myši v aplikaci. Při stisknutí pravého tlačítka myši (MouseDown) se uloží aktuální pozice kurzoru a aktivuje se sledování pohybu (mousePressed = true). Během pohybu myši (MouseMove) se spočítá změna pozice kurzoru a podle ní se upraví úhly rotace objektu kolem os X a Y (rotationX, rotationY). Po uvolnění tlačítka (MouseUp) se otáčení deaktivuje a pozice se vynuluje. Funkce tak umožňuje plynulé a intuitivní otáčení 3D modelu podle směru pohybu myši.

12 TESTOVÁNÍ

Program byl testován na:

- kombinacích parametrů,
- různých hustotách bodů,
- stabilitě při rychlém přepínání režimů.

Při testu vykreslení až 300^2 bodů ve 3D modelu a 10000 bodů ve 2D modelu nevykázala aplikace žádné pády ani výrazné zpomalení díky optimalizaci výpočtů. V rámci testování bylo cílem ověřit správnost vykreslení tvarů, stabilitu aplikace při extrémních hodnotách parametrů, reakční dobu uživatelského rozhraní a schopnost manipulace s objektem ve 3D modelu.

Díky optimalizacím na úrovni výpočetního algoritmu – jako je před výpočet trigonometrických hodnot, efektivní využití OpenGL funkcí jako GL.TriangleStrip nebo přepočet pouze při změně parametrů – nebylo zaznamenáno žádné zamrznutí, ztráta výkonu nebo selhání programu.

Testy byly rozděleny do několika skupin:

12.1 Funkční testování základních parametrů

Postup testování parametrizace

V rámci testování funkčnosti vizualizačního nástroje byla provedena systematická zkouška odezvy programu na změnu vstupních parametrů Gielisovy superformule. Postup spočíval ve sledovaném nastavení jednotlivých parametrů (m, n_1, n_2, n_3, a, b) od jejich minimálních po maximální hodnoty v rozsahu umožněném uživatelským rozhraním. Každý parametr byl měněn samostatně, aby bylo možné přesně určit, jak se změna promítá do tvaru generované křivky. Zvláštní důraz byl kladen na krajní hodnoty, které často vedou k výrazným deformacím nebo numerickým singularitám.

Během testu bylo zároveň monitorováno vykreslování výstupu v reálném čase s ohledem na stabilitu a plynulost aktualizace vizualizace. Ověřovalo se, zda program správně reflektuje nové hodnoty a zda dochází ke změně geometrie bez nutnosti restartu či zásahu do výpočetní logiky.

Vyhodnocení výsledků:

Testování ukázalo, že program dokáže dynamicky reagovat na změny všech parametrů bez ztráty stability. Vizuální odezva byla okamžitá a přesně odpovídala očekávanému chování dle definice superformule. Ani při rychlých sekvenčních změnách parametrů v extrémních rozsazích nedošlo k pádům aplikace, nečekanému chování nebo chybám ve vykreslování.

Díky tomu lze potvrdit, že implementace parametrického ovládání je robustní a připravená na uživatelské využití i v náročnějších scénářích, například při automatizovaném generování sad tvarů nebo plynulé animaci přechodů.

12.2 Stress-test rozlišení

Další část testování byla zaměřena na analýzu výkonu a stability aplikace při různých úrovních rozlišení generovaných Gielisových křivek. Rozlišení bylo definováno jako počet výpočetních bodů podél úhlové proměnné φ (phi), tedy počet segmentů, které tvoří výslednou křivku v prostoru. Vyšší počet bodů znamená detailnější a hladší výstup, ale současně i vyšší výpočetní nároky.

Pro účely testu bylo provedeno postupné navyšování počtu bodů v následujících úrovních:

Pro 3D model:

Tabulka 2 3D Stress-test

Počet bodů (rozlišení)	Výsledek
100 ²	bez problémů, plynulé
250 ²	plynulé, okamžitá reakce
500 ²	mírné zvýšení výpočetního času (cca 0.1 s)
1000 ²	střední zvýšení výpočetního času (cca 1 s)
2000 ²	výrazné zvýšení výpočetního času (cca 2-3 s)

(zdroj: vlastní)

Pro 2D model:

Tabulka 3 2D Stress-test

Počet bodů (rozlišení)	Výsledek
500	bez problémů, plynulé
1000	plynulé, okamžitá reakce
2500	plynulé
5000	stále plynulé
10000	plynulé bez zamrznutí

(zdroj: vlastní)

Zhodnocení a technické poznámky

Výsledky ukazují, že aplikace si i při velmi vysokém rozlišení udržuje funkční stabilitu a správnou odezvu výstupu. Klíčovým faktorem úspěchu je technická implementace výpočetního jádra:

- Použití OpenGL funkce `GL.TriangleStrip` pro spojité vykreslování plochy s minimalizovaným počtem volání `GL.Vertex`.
- Optimalizovaná struktura paměti pomocí předem vypočítaných hodnot trigonometrických funkcí pro daný úhlový krok.
- Efektivní přepoččet datových struktur pouze při změně parametrů, nikoli každým snímkem.

Díky těmto optimalizacím je možné program provozovat i s hodnotami rozlišení, které překračují běžný rozsah používaný při vizualizaci parametrických tvarů. Tím se potvrzuje, že nástroj je vhodný nejen pro demonstrační účely, ale i pro výpočetně náročnější analýzy a generování dat v oblasti počítačové geometrie a designu.

12.3 Test kombinací extrémních parametrů

V rámci ověřování robustnosti aplikace byla provedena série zátěžových testů, které měly za cíl prověřit chování programu při zadání extrémních hodnot parametrů Gielisovy superformule. Tyto testy reflektují situace, kdy uživatel vědomě nebo náhodně zadá hodnoty mimo běžný rozsah – například velmi vysoké nebo záporné exponenty, extrémní míru symetrie nebo záporné rozměrové konstanty. Takové situace představují reálný scénář při výuce, experimentování nebo generování neobvyklých tvarů.

Testovaná kombinace parametrů:

$$\begin{aligned}m &= -100, \\n_1 &= -100, \\n_2 &= 100, \\n_3 &= -100, \\a &= -10, \\b &= 10.\end{aligned}$$

Tyto hodnoty představují závažné zatížení numerického výpočtu, zejména kvůli operacím s mocninami záporných a velmi malých čísel, podílem nul a extrémní asymetrii tvaru. Testování probíhalo za běžného chodu programu, tedy bez restartu vykreslovací smyčky, aby bylo možné ověřit odolnost výpočetní logiky v reálném čase.

Výsledky a pozorování

Test ukázal, že i přes zadání velmi nestandardních hodnot, aplikace zůstala plně funkční, bez pádů nebo pádu výkresového vlákna, při žádné z extrémních kombinací nedošlo k výpočtu NaN hodnot, byly správně ošetřeny situace dělení nulou nebo záporné základy u lichých exponentů (např. přes absolutní hodnoty). I při těchto hodnotách bylo vykreslení křivky dokončeno, i když výsledný tvar byl často silně deformovaný, zploštělý nebo vizuálně nepřehledný – odpovídající očekávanému chování dané rovnice.

V některých případech vznikly tvary téměř zaniklé (plošně sbalené) nebo silně zaostřené (špičaté útvary). To však není známka chyby, ale matematicky správný důsledek extrémního nastavení exponentů n_1 až n_3 a parametrů měřítko. Například hodnota $n_1 = -100$ v kombinaci s $n_2 = 100$ způsobuje téměř nulovou hodnotu výsledného polárního poloměru $r(\varphi)$ v celé řadě úhlů, čímž křivka kolabuje do úzkého pásma.

Tato chování byla očekávaná a potvrzují, že implementace výpočetního modelu je numericky stabilní a připravena zvládat i nečekané vstupy bez narušení výstupního toku nebo kolapsu paměti.

12.4 Test ovládání a uživatelského rozhraní

Testování interaktivních ovládacích prvků aplikace

V rámci funkčního testování byla ověřena spolehlivost základních ovládacích prvků uživatelského rozhraní, které slouží k manipulaci s vykreslovaným objektem a přepínání mezi různými režimy zobrazení. Tyto prvky jsou klíčové pro efektivní uživatelskou interakci a zároveň představují citlivé komponenty z pohledu výkonnosti a synchronizace s výpočetní částí aplikace.

Test se zaměřil na následující funkce:

1. Přibližování a oddalování pomocí kolečka myši – mění parametr **zoom**, který ovlivňuje měřítko vykreslování objektu v rámci aktuálního renderu(vykreslení).
2. Rotace objektu pomocí kliknutí a tažení pravým tlačítkem myši – umožňuje volné otáčení modelu kolem os X a Y na základě pohybu kurzoru. Tato funkce je dostupná ve 3D režimu a využívá ukládání předchozí pozice myši pro výpočet rozdílu.
3. Přepínání mezi 2D a 3D režimem zobrazení – realizováno pomocí přepínače (radio button), který střídá aktivní GLControl (OpenGL plátno). 2D režim zobrazuje křivku jako rovinnou projekci, 3D režim renderuje povrch tvořený pomocí sféroidního rozkladu superformule.
4. Reset všech parametrů pomocí dedikovaného tlačítka – navrácí posuvníky (trackbary) do výchozích hodnot, které odpovídají základní symetrické podobě superformule. Zajišťuje tím rychlý návrat k výchozímu vizuálnímu modelu.

Výsledky testování a pozorování:

Všechny uvedené funkce byly testovány v prostředí simulujícím běžné uživatelské chování, tedy s rychlými přechody mezi režimy, plynulým pohybem myši i opakovaným resetováním.

Během testu:

- Nedošlo k žádnému zamrznutí aplikace ani výpadku renderovací smyčky.
- Všechny akce byly zpracovány okamžitě, s minimální odezvou už při standardní konfiguraci (Intel i5, 8 GB RAM).
- Přepínání mezi režimy 2D/3D probíhalo plynule, bez artefaktů nebo přechodového blikání obrazu.
- Při změnách měřítka pomocí kolečka myši bylo správně aktualizováno přepočítání souřadnic, aniž by došlo k posunu mimo střed nebo ke ztrátě kvality zobrazení.
- Také u rotace objektu pomocí myši bylo potvrzeno, že výpočty úhlových rotací jsou numericky stabilní – po uvolnění tlačítka nedocházelo k náhlému zpětnému přetočení nebo skokům, které by mohly narušit uživatelský dojem.
- Reset tlačítkem korektně vrátil všechny parametry do výchozích hodnot a zároveň aktivoval opětovné překreslení, čímž potvrdil provázanost ovládací logiky s vykreslovacím cyklem.

13 SCÉNÁŘE POUŽITÍ A UKÁZKY

Aplikace umožňuje mnoho různých scénářů využití. Níže jsou ukázány některé typické příklady:

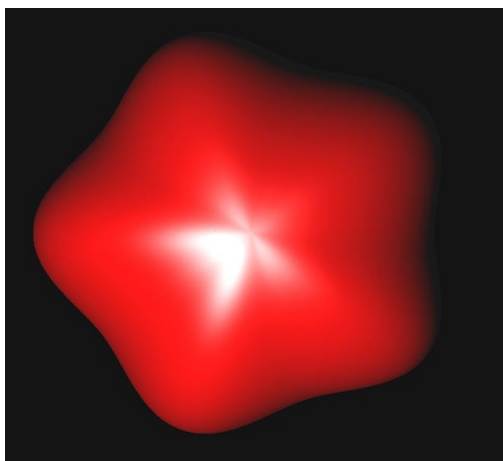
13.1 Vizualizace pravidelné květinové křivky

Nastavení:

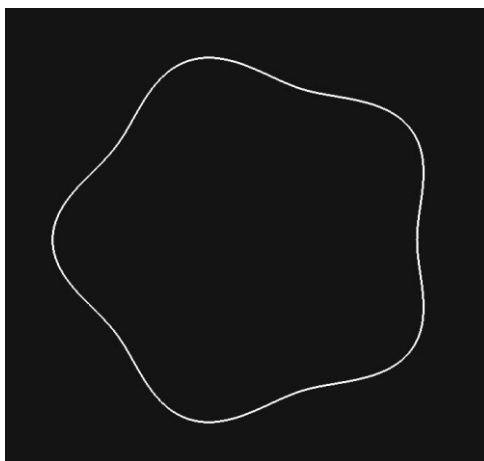
- $m = 5, n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = 3, a = 1, b = 1$ pro horizontální úhel,
- $m = 2, n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, a = 1, b = 1$ pro vertikální úhel.

Výsledek:

- Pěticipý zaoblený tvar připomínající květinu.



Obrázek 9 Květina 3D



Obrázek 8 Květina 2D

13.2 Vizualizace pravidelné hvězdicové křivky

Nastavení:

- $m = 5$, $n_1 = 0.1$, $n_2 = 1.7$, $n_3 = 1.7$, $a = 1$, $b = 1$ pro horizontální úhel,
- $m = 1$, $n_1 = 0.3$, $n_2 = 0.5$, $n_3 = 0.5$, $a = 1$, $b = 1$ pro vertikální úhel.

Výsledek:

- Pěticičný zaoblený tvar připomínají mořskou hvězdu



Obrázek 10 Hvězda 3D



Obrázek 11 Hvězda 2D

13.3 Vizualizace čočkovité křivky

Nastavení:

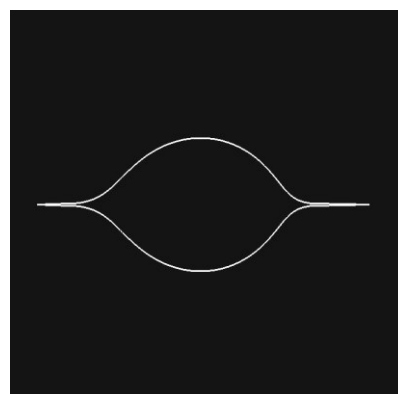
- $m = 2$, $n_1 = 0.7$, $n_2 = 0.3$, $n_3 = 0.2$, $a = 1$, $b = 1$ pro horizontální úhel,
- $m = 3$, $n_1 = 100$, $n_2 = 100$, $n_3 = 100$, $a = 1$, $b = 1$ pro vertikální úhel.

Výsledek:

- Čočkovitý tvar s horizontálním zploštěním



Obrázek 13 Čočka 3D



Obrázek 12 Čočka 2D

ZÁVĚR

V této bakalářské práci jsem se zabýval Gielisovou superformulí, což je matematický vzorec, který dokáže pomocí několika parametrů generovat velmi rozmanité tvary – od jednoduchých kruhů až po složité přírodní struktury. V teoretické části jsem se nejprve zaměřil na základní matematické principy, jako jsou různé soustavy souřadnic nebo parametry Laméových křivek, které superformuli předcházely. Následně jsem se věnoval samotné Gielisově rovnici, její struktuře, možnostem úprav a tomu, jaký vliv mají jednotlivé parametry na výsledný tvar.

Superformule mě zaujala hlavně tím, jak jednoduše dokáže pomocí několika čísel popsat tvar, který jinak vypadá složitě – třeba květiny, hvězdy nebo skořápky. Během zpracování jsem narazil na řadu odborných článků, které dokazují, že se tato rovnice využívá nejen v matematice, ale třeba i v biologii, architektuře nebo počítačové grafice.

V praktické části jsem vytvořil vlastní aplikaci v jazyce C#, která umožňuje vizualizovat Gielisovy křivky ve 2D i 3D. Uživatel si může interaktivně měnit jednotlivé parametry a sledovat, jak se křivka mění. Aplikace byla testována při různých kombinacích parametrů i různých rozlišeních a ukázala se jako stabilní a rychlá při 2D do 10000 bodů a 3D do 300^2 bodů. Při výpočtech jsem se snažil optimalizovat výkon, aby bylo možné zobrazovat i náročnější tvary bez zpoždění.

Celkově mě práce na této bakalářce bavila – spojení matematiky, programování a vizualizace mi přišlo velmi zajímavé. Díky tomu jsem si mohl ověřit, jak se teoretické znalosti dají využít v praxi, a jak může matematika pomáhat nejen vědcům, ale i grafikům, inženýrům nebo studentům. Do budoucna by bylo možné aplikaci ještě rozšířit – například přidat export tvarů, jejich animaci nebo podporu dalších rozměrů.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] GIELIS, Johan. *The geometrical beauty of plants*. Dordrecht: Atlantis Press, 2017. ISBN 978-946-2391-512
- [2] LASTRA, Alberto. *Parametric geometry of curves and surfaces: architectural form-finding*. Mathematics and the built environment. Cham: Birkhäuser, [2021]. ISBN 978-3-030-81316-1.
- [3] LINKEOVÁ, Ivana. *Základy počítačového modelování křivek a ploch*. Praha: České vysoké učení technické, 2008. ISBN 9788001040119.
- [4] GIELIS, Johan. A generic geometric transformation that unifies a wide range of natural and abstract shapes. *American Journal of Botany*. Online. 2003, 90(3), 333–338 ISSN 0002-9122. Dostupné z: <https://doi.org/10.3732/ajb.90.3.333>. [cit. 2025-04-27].
- [5] MATSUURA, Masaya. Gielis' superformula and regular polygons. *Journal of Geometry*. Online. 2015, 106, 383–403 Dostupné z: <https://doi.org/10.1007/s00022-015-0269-z>. [cit. 2025-04-27].
- [6] GIELIS, J. Transformations and Their Impact on Science and Technology. Online. 2021, ResearchGate. Dostupné z: <http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.26896.64005/2> [cit. 2025-04-27].
- [7] GIELIS, Johan; HAESSEN, Stijn a VERSTRAELEN, Leo. *Universal natural shapes*. [s.l.]: ResearchGate, 2010. ISBN 978-90-9025193-6.
- [8] PREEN, R. J. a BULL, L. (2014). Towards the evolution of vertical-axis wind turbines using supershapes. *Evolutionary Intelligence*. Online. 2014, 7(3), 155–167 Dostupné z: <https://doi.org/10.1007/s12065-014-0116-4>. [cit. 2025-04-27].
- [9] RAMBUS PRESS. The algorithms of No Man's Sky. Online.Rambus.com, 17. 5. Dostupné z: <https://www.rambus.com/blogs/the-algorithms-of-no-mans-sky-2/>. [cit. 2025-04-27].
- [10] GIELIS, Johan; FOUGEROLLE, Yannick; RICCI, Peter E., et al. Universal natural shapes: From unifying shape description to simple methods for shape analysis and boundary value problems. *PLOS ONE*. Online. 2012, Dostupné z: <https://journals.plos.org/plosone/article?id=10.1371/journal.pone.0029324>. [cit. 2025-04-27].

- [11] LI, Yunjia; SHI, Peijian a GIELIS, Johan. A general leaf area geometric formula exists for plants – Evidence from the simplified Gielis equation. *Forests*. Online. 2018, 9(11), 714 Dostupné z: <https://doi.org/10.3390/f9110714>. [cit. 2025-04-27].
- [12] GIELIS, Johan; DING, Yu a SHI, Peijian. Towards a Geometrical Theory of Morphology and Morphogenesis. Online. 2016, Dostupné z: <https://www.researchgate.net/publication/310109403>. [cit. 2025-04-27].
- [13] GOODFELLOW, Paul. Interactive Animation Techniques in Systems Art. *Leonardo Electronic Almanac*. Online. 2013, Dostupné z: <http://ojs.gold.ac.uk/index.php/lea/article/view/78>. [cit. 2025-05-27].
- [14] FREIBERG, Simon. *Procedural Generation of Content in Video Games*. Hamburg: HAW Hamburg. Online. 2016, Dostupné z: <https://reposit.haw-hamburg.de/handle/20.500.12738/7516>. [cit. 2025-05-27].
- [15] LAGAE, Ares a DUTRÉ, Philip. A procedural object distribution function. *ACM Transactions on Graphics*. Online. 2005, Dostupné z: <https://doi.org/10.1145/1095878.1095888>. [cit. 2025-04-27].
- [16] TOKA, Mehmet. *Procedural modeling of 3D surfaces using Superformula*. Online. 2018, Dostupné z: https://www.academia.edu/download/59833448/thesis_siren_0903_draft_final20190622-105677-elazg6.pdf. [cit. 2025-04-27].
- [17] GIELIS, Johan; BASTIAENS, Erik; KRIKKEN, Thomas, et al. Variational Superformula Curves for 2D and 3D Graphic Arts. *SIGGRAPH*. Online. 2004, Dostupné z: <https://dl.acm.org/doi/pdf/10.1145/1186415.1186421>. [cit. 2025-04-27].
- [18] DE SMEDT, Tom. *Modeling Creativity: Case Studies in Python*. Online. 2013 Dostupné z: <https://books.google.com/books?id=Bp7KwpmFBzoC>. [cit. 2025-04-27].
- [19] BORY, Pavel. *C# bez předchozích znalostí*. Brno: Computer Press, 2016. ISBN 978-80-251-4686-6.
- [20] IAMTIMCOREY. Intro to Windows Forms (WinForms) in .NET 6. Online. YouTube, 8. 8. 2022 Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=0zLZQesgV5o&ab_channel=IAmTimCorey. [cit. 2023-11-11].

[21] EXCELLENT PROGRAMMER. *How to draw curve using C#*. Online. YouTube, 6. 2. 2022 Dostupné z:

https://www.youtube.com/watch?v=Ls9mu3xlvTE&ab_channel=Excellentprogrammer.

[cit. 2023-11-11].

[22] OPEN TOOLKIT LIBRARY, *Basic Lighting - OpenTK*. Online. <https://opentk.net/>.

Dostupné z: <https://opentk.net/learn/chapter2/2-basic-lighting.html>. [cit. 2025-05-28].

[23] OPEN TOOLKIT LIBRARY, *OpenTK documentation*. Online. GitHub. Dostupné z:

<https://github.com/opentk/opentk> [cit. 2025-05-27].

[24] BOURKE, Paul. *Supershapes / SuperFormula*. Online. Paulbourke.net. 2002.

Dostupné z: <https://paulbourke.net/geometry/supershape/>. [cit. 2025-05-30].

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek 1 Laméovy křivky vytvořeno v Desmos.com.....	17
Obrázek 2 Kategorie superformule. Copyright Kristof Lenjou	23
Obrázek 3 Gielisova superformule ve 3D.....	28
Obrázek 4 S využitím Phong modelu	43
Obrázek 5 Bez Phong modelu.....	43
Obrázek 6 Uživatelské rozhraní pro 2D.....	44
Obrázek 7 Uživatelské rozhraní pro 3D.....	45
Obrázek 8 Květina 2D.....	56
Obrázek 9 Květina 3D.....	56
Obrázek 10 Hvězda 3D.....	57
Obrázek 11 Hvězda 2D.....	57
Obrázek 12 Čočka 2D.....	57
Obrázek 13 Čočka 3D.....	57

SEZNAM TABULEK

Tabulka 1: Struktura programu.....	36
Tabulka 2: 3D Stress-test.....	50
Tabulka 3: 2D Stress-test.....	50

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

NaN	Not a Number – hodnota, která se nereprezentuje jako konečné číslo
GL	OpenGL – Open Graphics Library
GUI	Graphical User Interface – grafické uživatelské rozhraní
2D	Dvourozměrný (two-dimensional)
3D	Trojrozměrný (three-dimensional)
CPU	Central Processing Unit – centrální procesorová jednotka
PDF	Portable Document Format
OBJ	Formát souboru pro 3D modely (Wavefront OBJ)
STL	Standard Tessellation Language – formát pro 3D tisk
API	Application Programming Interface – rozhraní pro programování aplikací

SEZNAM PŘÍLOH

Příloha P I: Prompty

Příloha P II: ZIP soubor

PŘÍLOHA P I: PROMPTY

1. Vytvoř mi strukturu bakalářské práce z bodů zadání.
2. Zařad' mi tuto novou kapitolu do stávající struktury.
3. Zkus mi upravit tento text na přehledně čitelný odstavec s výčtem.
4. Vytvoř mi shrnutí z tohoto textu.

PŘÍLOHA P II: ZIP SOUBOR

ZIP soubor obsahující:

1. Složka AplikaceReadyToRun – obsahuje vše potřebné pro spuštění aplikace
2. Složka Elipsoid3D – obsahuje vše pro spuštění projektu ve Visual Studio 2022
3. packages – balíčky projektu
4. Elipsoid3DUPDATE.sln – spustitelný soubor projektu
5. Gielis Superformula Aplikace.Ink – zástupce aplikace
6. Soubor “fulltext.pdf” – ve formátu PDF/A
7. Textový soubor “zdrojový kód programu” – obsahuje kód programu